

《线性代数》期末试卷 A 评析

一、单项选择题 (本大题共 8 个小题, 每小题 2 分, 共 16 分。)

1. 已知 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 5 & b \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix}$, 则 b 的代数余子式为 ()

A、6 B、-6 C、6b D、-6b

【讲评】考点: 行列式的代数余子式。

本题: 因为 b 在 D 的第 2 行, 第 3 列, 划去 b 所在的第 2 行, 第 3 列, 得到:

$$\text{代数余子式为 } A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -6$$

选: B。

2. 设 A 、 B 为同阶方阵, 下列等式中恒正确的是 ()

A、 $AB=BA$ B、 $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$ C、 $|A+B|=|A|+|B|$ D、 $(A+B)^T=A^T+B^T$

【讲评】考点: 矩阵运算的基本算律:

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}, \quad (AB)^T=B^TA^T, \quad |kA|=k^n|A|, \quad |AB|=|A||B|, \quad C(A+B)=CA+CB, \quad |-A|=(-1)^n|A|, \\ (A+B)C=AC+BC, \quad (A^T)^{-1}=(A^{-1})^T, \quad (A^T)^T=A, \quad (A^{-1})^{-1}=A, \quad (kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1} \quad (A+B)^T=A^T+B^T \text{ 等等。}$$

本题: 正确的是 $(A+B)^T=A^T+B^T=A^T+B^T$, 其余均为错误的。

选: D。

3. 下列向量组中, 线性无关的向量组是 ()

A、 $(1,a,1,1), (0,b,1,1), (0,c,0,1)$ B、 $(2,3), (3,4), (5,6)$
C、 $(x,y,z), (1,2,3), (2x,2y,2z)$ D、 $(5,,6,7), (x,y,z), (0,0,0)$

【讲评】考点: 向量组线性相关与无关的判别。

① $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关 \Leftrightarrow 其中一个可由其余线性表示;

② 部分相关 \Rightarrow 整体相关;

③ 无关组的延长组是无关组;

④ 若向量个数多于向量维数, 则向量组线性相关;

⑤ 多可由少线性表示 \Rightarrow 多必线性相关。

本题: 因为向量组 $(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)$ 线性无关, 所以它的延长组

$(1,a,1,1), (0,b,1,1), (0,c,0,1)$ 是无关组; 其余各组都是线性相关组。 □

注意: 延长组也可以从中间插入, 因为向量组 $(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)$ 线性无关,

所以中间延长组 $(1,1,x,1), (0,1,y,1), (0,0,z,1)$ 也是无关组。

选: A。

4. 设 β_1, β_2 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的两个解, 则下列向量中仍为方程组的解的是 ()

A、 $(\beta_1-2\beta_2)/2$ B、 $2\beta_1-3\beta_2$ C、 $(5\beta_1+2\beta_2)/7$ D、 $\beta_1+2\beta_2$

【讲评】考点: 非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解的矩阵形式。

若 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 是 $AX=b$ 的解, 则 $c_1\beta_1+c_2\beta_2+\dots+c_s\beta_s$ 是 $AX=b$ 的解 $\Leftrightarrow c_1+c_2+\dots+c_s=1$ 。

本题 已知 $A\beta_1=b, A\beta_2=b$,

$$\Rightarrow A[(\beta_1-2\beta_2)/2] = (b-2b)/2 = -b/2 \quad A[2\beta_1-3\beta_2] = 2b-3b = -b$$

$$A[(5\beta_1+2\beta_2)/7] = (5b+2b)/7 = b \quad A[\beta_1+2\beta_2] = b+2b = 3b$$

只有 $(5\beta_1+2\beta_2)/7$ 是 $AX=b$ 的解。 □

选: C。

5. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, 问下列哪一个向量是对应于 A 的特征值 5 的特征向量 ()
- A、 $(1,1,1)^T$ B、 $(0,0,0)^T$ C、 $(1,0,0)^T$ D、 $(0,1,1)^T$

【讲评】考点：特征值与特征向量的定义：

若 A 满足 $A\alpha = \lambda\alpha$, $\alpha \neq 0$, 则称 λ 为 A 的一个特征值, 称 α 为 A 的对应与 λ 的一个特征向量。

本题: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 且 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \text{零向量}$, 所以 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 为 A 的对应与特征值 5 的一个特征向量。

选: A。

6. 下列矩阵中为正交矩阵的是 ()

A、 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ B、 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ C、 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ D、 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

【讲评】考点: A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow A$ 的列向量组为标准正交向量组。

[解]: 逐列检查每一个矩阵的列向量组, 得到只有 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是正交矩阵。 □

选: B。

7. 设 3 阶方阵 A 的特征值是 -3, 1, 2 对应的特征向量依次是 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 若 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 则 $P^{-1}AP =$ ()

A、 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$ B、 $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$ C、 $\begin{pmatrix} -3 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ D、 $\begin{pmatrix} -3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

【讲评】考点: A 相似于对角矩阵, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$

其 P 的列向量的次序与对角阵的主对角线上元素相对应。

[解]: 因为 A 的特征值是 -3, 1, 2 对应的特征向量依次是 ξ_1, ξ_2, ξ_3 ,

若 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 则 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ □

选: C。

8. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 的秩为 3, 正惯性指数为 2, 则其规范形为 ()

A、 $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ B、 $2y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$ C、 $-y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ D、 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

【讲评】考点: 二次型的规范形是由秩与惯性指数唯一确定。

[解]: 秩为 3, 正惯性指数为 2, 其规范形为: $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$;

秩为 5, 正惯性指数为 1, 其规范形为: $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2$;

秩为 3, 正惯性指数为 0, 其规范形为: $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ 。 □

选: D。

二. 简答题 (每小题 4 分, 共 32 分)

9. 若 $\begin{vmatrix} k & 1005 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$, 求 k 的值。

【讲评】考点: 二阶行列式计算, 用对角线法则。

[解]: $\begin{vmatrix} k & 1005 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2k - 4 \times 1005 = 0 \Rightarrow k = 2010$ □

10. 设 A 为 3×4 矩阵, 且方程组 $Ax=0$ 的基础解系含有 2 个解向量, 求秩(A)。

【讲评】考点: 齐次线性方程组 $A_{m \times n}X=0$ 的基础解系含解向量个数 $=n-r(A)$ 。

[解]: 因为 A 为 3×4 矩阵, 所以 $Ax=0$ 含有 4 个未知量, 即 $n=4$ 。

又已知 $Ax=0$ 的基础解系含有 2 个解向量, $\Rightarrow n-r(A)=2$

$\Rightarrow r(A)=2$ \square

11. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 计算 AB 。

【讲评】考点: 矩阵的乘法运算规则, AB 的第 (i,j) 位置元素等于 A 的第 i 行与 B 的第 j 列对应元素乘积之和。设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, B 为 $n \times s$ 阶矩阵, 则 AB 为 $m \times s$ 阶矩阵。

[解]: A 为 3×2 阶, B 为 2×3 阶, 所以 AB 为 3×3 阶。

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 0 & 1 \times 0 + 2 \times 1 & 1 \times 2 + 2 \times 0 \\ 0 \times 1 + 3 \times 0 & 0 \times 0 + 3 \times 1 & 0 \times 2 + 3 \times 0 \\ 4 \times 1 + 5 \times 0 & 4 \times 0 + 5 \times 1 & 4 \times 2 + 5 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 8 \end{bmatrix} \quad \square$$

12. 求方程组 $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ 的全部解。

【讲评】考点: 齐次线性方程组 $A_{m \times n}X=0$ 的基础解系含解向量个数 $=n-r(A)$ 。自由未知量的选择。

[解]: $A = [1 \ 2 \ -3]$, 的秩(A)=1, 未知量个数 $n=3$,

自由未知量个数 $=n-r(A)=3-1=2$,

可取 x_2, x_3 为自由未知量,

$$\text{得到通解为} \begin{cases} x_1 = -2c_1 + 3c_2 \\ x_2 = c_1 \\ x_3 = c_2 \end{cases} \quad \text{其中 } c_1, c_2 \text{ 为任意常数。} \quad \square$$

13. 已知 A 有一个特征值 -2, 求矩阵 $B=A^2+3I$ 的一个特征值。

【讲评】考点: 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$,

则 A 的多形式 $f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ 。

[解]: A 的一个特征值为 -2, 已知 $B=f(A)$ 其中 $f(x)=x^2+3$

$\Rightarrow B$ 的特征值为 $f(-2) = (-2)^2 + 3 = 7$ \square

14. 设三阶方阵 A 的特征值分别为 -1, 1, 2, 且 B 与 A 相似, 求 $|3B|$ 。

【讲评】考点: 相似矩阵有相同的特征值, 且 $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A|$ 。

[解]: A 的特征值为 -1, 1, 2, $\Rightarrow B$ 的特征值为 -1, 1, 2,

$\Rightarrow 3B$ 的特征值为 -3, 3, 6, $\Rightarrow |3B| = (-3) \times 3 \times 6 = -54$ \square

15. 已知 3 维向量 $\alpha = (1, 2, 3)^T$, $\beta = (-3, 2, 1)^T$, 求 α 与 β 的内积。

【讲评】考点: 向量的内积: 设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$,

则 α 与 β 的内积为 $\alpha^T \beta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ 。

[解]: α 与 β 的内积为 $1 \times (-3) + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 4$ \square

16. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 所对应的二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 。

【讲评】考点: 二次型与对称矩阵一一对应。 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X$ 。

[解]: $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$ \square

三、计算题（本大题共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

17. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ 。

[解]: $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 3A_{14} = 3 \times (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-3) \times (-2) \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$
 $= (-6) \times 18 = -108$ □

18. 设矩阵 X 满足方程 $AXB=C$, 求 X .

其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ 。

[解]: 方程变形 $X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ □

19. 求非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解(用特解与导出组的基础解系表示)。

[解]: $[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & -9 & -8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & -7 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

取 x_3, x_4 为自由未知量, 得到

特解 $\eta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 其导出组的基础解系为 $\xi_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\xi_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

从而全部解为 $\eta + c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ (c_1, c_2 为任意常数) □

20. 求向量组 $\alpha_1=(1,2,3,1004)$, $\alpha_2=(2,3,5,2010)$, $\alpha_3=(1,2,2,1000)$, $\alpha_4=(1,1,1,1002)$ 的一个最大无关组, 并把其余向量用该最大无关组线性表示。

$$\begin{aligned} \text{[解]: } [\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1004 & 2010 & 1000 & 1002 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是一个最大无关组, 且 $\alpha_4 = -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. \square

21. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = kx_1^2 + k^2x_2^2 + 4kx_1x_2 + x_3^2$, 为正定二次型, 求 k 满足的条件。

$$\text{[解]: } f \text{ 的矩阵 } A = \begin{bmatrix} k & 2k & 0 \\ 2k & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, f \text{ 为正定二次型} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta_1 = |k| > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} k & 2k \\ 2k & k^2 \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} k & 2k & 0 \\ 2k & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0,$$

$$\Leftrightarrow k > 0, k^3 - 4k^2 > 0, k^3 - 4k^2 > 0,$$

$$\Leftrightarrow k > 4. \quad \square$$

四、综合题 (本大题共 2 小题, 每小题 6 分, 共 12 分)

22. 已知 $A = \begin{bmatrix} x & -1 & 2 \\ y & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 的一个特征向量 $\alpha = (1, 1, -1)^T$, 求 x, y 及 α 所对应的特征值, 并写出对应于这个特征值的全部特征向量。

$$\text{[解]: } A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \begin{bmatrix} x & -1 & 2 \\ y & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 - 2 = \lambda \\ y - 3 - 3 = \lambda \\ -1 + 0 + 2 = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

$$\text{将 } \lambda = -1 \text{ 代入 } (\lambda I - A) = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 得到基础解系为 } \alpha_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

对应于 $\lambda = -1$ 的全部特征向量为 $c_1\alpha_1$, 其中 c_1 为任意非零常数; \square

23. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 $Ax=b(b \neq 0)$ 的线性无关解, 证明 $2\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_1$ 是对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的线性无关解。

$$\text{[证]: 设 } \beta_1 = 2\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1,$$

$$\text{则因为 } A\beta_1 = A(2\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2) = 2b - b - b = 0, A\beta_2 = A(\alpha_2 - \alpha_1) = b - b = 0,$$

所以 $2\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_1$ 是对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解。

$$\text{再考察 } k_1\beta_1 + k_2\beta_2 = 0 \quad (*)$$

$$\text{代入整理得到: } (-k_1 - k_2)\alpha_1 + (-k_1 + k_2)\alpha_2 + 2k_1\alpha_3 = 0$$

$$\text{因为 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性无关, 所以只有 } \begin{cases} -k_1 - k_2 = 0 \\ -k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{只有 } k_1 = k_2 = 0$$

即(*)成立只有 $k_1 = k_2 = 0$. 于是 $\beta_1 = 2\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1$ 是线性无关的解向量。

所以 $2\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_1$ 是对应齐次线性方程组 $Ax=0$ 的线性无关的解。 \square